

Zählmaß und

$$S := \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\},$$

$$f := \chi_S$$

Beachte: $\mathcal{L}^1$ und ρ sind Borel-regulär

$\Rightarrow \mathcal{L}^1 \times \rho$ ist Borel-regulär, so

dass die Borel-Menge S $(\mathcal{L}^1 \times \rho)$ -

messbar ist. Wegen $f = \chi_S \geq 0$

folgt $(\mathcal{L}^1 \times \rho)$ -Integrierbarkeit von f .

Abs:

$$\int \left(\int f(x, y) d\mathcal{L}^1(x) \right) d\rho(y) =$$

$$\int \mathcal{L}^1(\{x : (x, y) \in S\}) d\rho(y) =$$

$$\int \mathcal{L}^1(\{y\}) d\rho(y) = \int 0 \cdot d\rho(y) = 0$$

und

$$\int \left(\int f(x, y) d\rho(y) \right) d\mathcal{L}^1(x) =$$

$$\int \rho(\{y : (x, y) \in S\}) d\mathcal{L}^1(x) =$$

$$\int_{[0,1]} \rho(\{x\}) d\mathcal{L}^1(x) = 1$$

// Nach Fubini" ist daher insbesondere

$$(\mathcal{L}^1 \times \rho)(S) = \int f(x, y) d(\mathcal{L}^1 \times \rho)$$

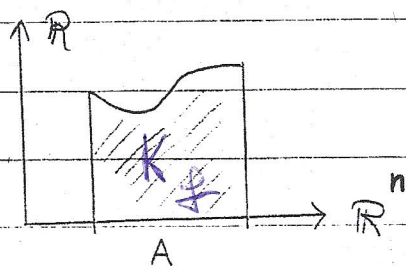
$$= \infty,$$

denn andernfalls wären die iterierten
Integrale gleich.

Anwendung von Fubini:

248
- 345

Volumen des Katagraphen:



Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$ -messbar,

$$f: A \rightarrow [0, \infty] \quad \text{---//---}$$

← Katagraph ($\mathcal{L}^{n+1}$ -messbar!)

Setze $K_f := \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$. Dann gilt

$$\mathcal{L}^{n+1}(K_f) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_A \mathcal{L}^1(\{t \in \mathbb{R} : (x, t) \in K_f\}) d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$\int_A \mathcal{L}^1(\{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x)\}) d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$\int_A f(x) d\mathcal{L}^n(x)$$

Wendet man Fubini auf die Schnitte in t -Richtung an, so

folgt:

$$\mathcal{L}^{n+1}(K_f) = \int \mathcal{L}^n(\{x \in A : (x, t) \in K_f\}) d\mathcal{L}^1(t) =$$

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} \mathcal{L}^n(\{x \in A : t \leq f(x)\}) d\mathcal{L}^1(t) =$$

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} \mathcal{L}^n(f^{-1}([t, \infty])) d\mathcal{L}^1(t)$$

Kontext:

$$i) \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\max\{|x|^3, |y|^3, |z|^3\}} d\mathcal{L}^3(x, y, z) = ?$$

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \exp(-\max\{|x|^3, |y|^3, |z|^3\})$.

f ist stetig $\Rightarrow f$ $\mathcal{L}^3$ -messbar; außerdem: $f \geq 0$

deshalb: $\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) d\mathcal{L}^3(x, y, z) \stackrel{\substack{\text{1te Formel} \\ \text{2te Formel}}}{=} \mathcal{L}^4(K_f) =$

$$\int_0^\infty \mathcal{L}^3(f^{-1}([t, \infty))) d\mathcal{L}^1(t). \quad \text{Für } t > 0 \text{ ist}$$

$$f^{-1}([t, \infty)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|^3, |y|^3, |z|^3\} \leq \sqrt[3]{\ln \frac{1}{t}}\},$$

wobei wir $t \leq 1$ annehmen dürfen, da stets $f \leq 1$.

Also ist $f^{-1}([t, \infty))$ ein Würfel mit Kantenlänge $2\sqrt[3]{\ln \frac{1}{t}} \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\max\{|x|^3, |y|^3, |z|^3\}} d\mathcal{L}^3(x, y, z) = \int_0^1 (2\sqrt[3]{\ln \frac{1}{t}})^3 dt =$$

$$\int_0^1 8 \ln \frac{1}{t} dt = -8 \int_0^1 \ln t \cdot dt = -8 [t \cdot \ln t - t]_0^1 = 8.$$

Dieses Beispiel zeigt, daß man die Katagraphenformel auch zur Berechnung von iterierten Integralen benutzen kann. Die Formel aus S. 25.11 (iv) führt

wohl nicht (?) so direkt zum gewünschten Ergebnis.

ii) $\int_{[0,1]^2} (x^2 + xy) d\mathcal{L}^2(x,y) ?$

Alle Vor. von (iv) des Satzes erfüllt $\implies$

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} (x^2 + xy) d\mathcal{L}^2(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2 + xy) d\mathcal{L}^1(x) \right) d\mathcal{L}^1(y) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2 + xy) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}y \right) dy \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

wobei wir die $\mathcal{L}^1$ -Integrale standardmäßig ausrechnen dürfen.

iii) $\int_{\{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\}} (1 - \sqrt{x^2+y^2}) d\mathcal{L}^2(x,y) =$ $\uparrow$ Katagraphenformel

$\mathcal{L}^3(\{(x,y,z): x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}) \stackrel{\downarrow}{=}$

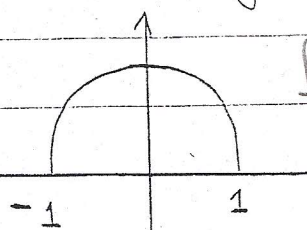
$\int_0^1 \mathcal{L}^2(\{(x,y): 1 - \sqrt{x^2+y^2} \geq t\}) dt =$

$\int_0^1 \mathcal{L}^2(B_{1-t}(0,0)) dt = \omega_2 \cdot \int_0^1 (1-t)^2 dt$

$\omega_2 := \mathcal{L}^2(B_1(0,0)) ?$

$(n \geq 2: \omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0)))$

Zur Berechnung von ω_2 benutzt man die Kartographenformel



Sei $f(t) := \sqrt{1-t^2} \Rightarrow$

$$\mathcal{L}^2(\text{semicircle}) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt,$$

also $\omega_2 = 2 \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \pi.$ Einsetzen ergibt

$$\int_{\{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\}} (1 - \sqrt{x^2+y^2}) d\mathcal{L}^2(x,y) = \pi/3.$$

□

DIE TRANSFORMATIONS FORMEL für $\mathcal{L}^n$

verallgemeinert die Substitutionsregel für eindimensionale Integrale und

gestattet manchmal die Reduktion komplizierter Mehrfachintegrale auf einfache

Ausdrücke

Situation: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: U \rightarrow \Phi(U)$ sei ein Diffeomorphismus

der Klasse C^1

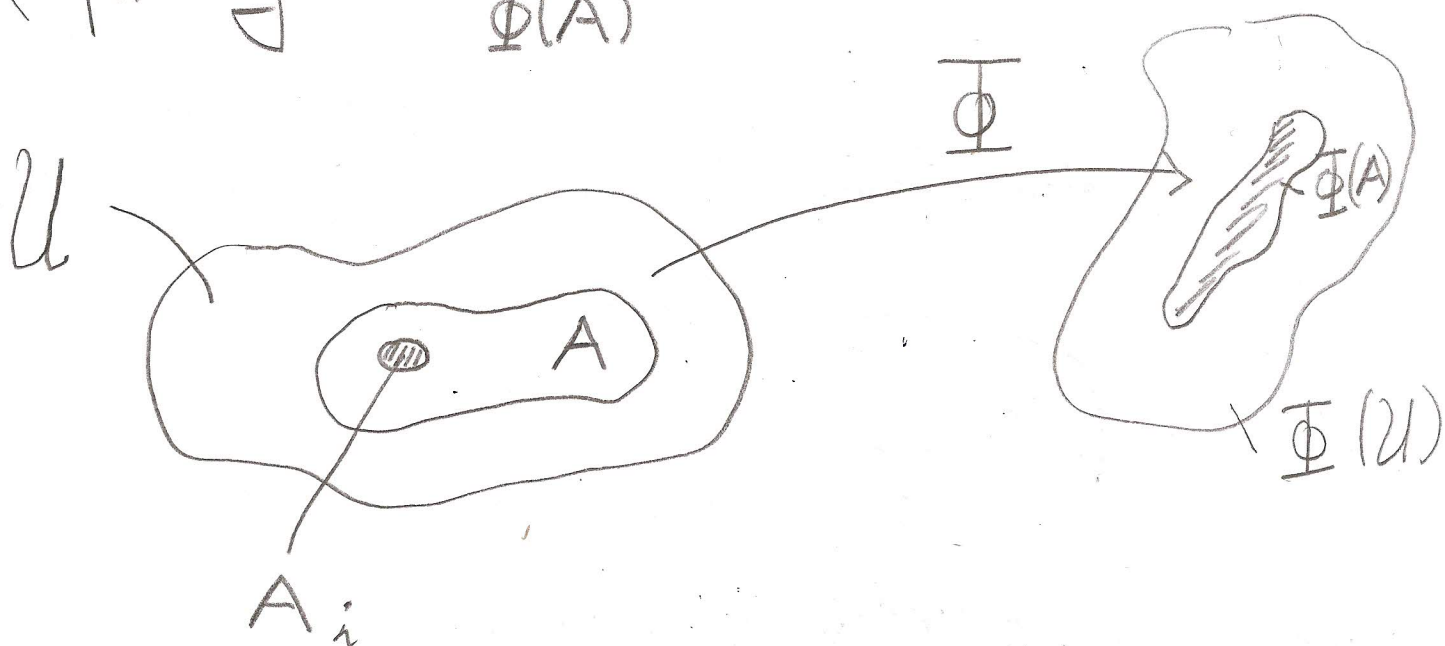
Problem: welche Beziehung besteht zwischen $\mathcal{L}^n(A)$ und $\mathcal{L}^n(\Phi(A))$ für $A \subset U$? Genauer:

Formel für $\mathcal{L}^n(\Phi(A))$!

allgemeiner: Umrechnung von

$\int_{\Phi(A)} g \, d\mathcal{L}^n$ in ein Integral über A

(für $g = \chi_{\Phi(A)} \leadsto 1^{\text{tes Problem}}$)



Zerlege A in kleine Stücke A_i mit

$$\mathcal{L}^n(A) \approx \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_i),$$

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A)) \approx \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\Phi(A_i))$$

$\uparrow$ betrachte alles auf $U' \subset U$, Φ dort global Lipschitz

und

$$\Phi(x) \approx \underbrace{D\Phi(a_i)(x-a_i) + \Phi(a_i)}_{=: T_i(x)}$$

auf A_i

Hierbei : $a_i \in A_i \implies$

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A_i)) \approx \mathcal{L}^n(T_i(A_i))$$

$$\stackrel{\nabla}{=} \mathcal{L}^n(D\Phi(a_i)(A_i)),$$

denn $D\Phi(a_i) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $T_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

unterscheiden sich nur durch eine

Translation ; Satz 23.9 iv) $\implies$

$$\mathcal{L}^n(D\Phi(a_i)(A_i)) = |\det D\Phi(a_i)| \cdot \mathcal{L}^n(A_i)$$

Zusammen folgt:

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A)) \approx \sum_{i=1}^{\infty} |\det D\Phi(a_i)| \mathcal{L}^n(A_i)$$

Da $x \mapsto |\det D\Phi(x)|$ stetig ist,

ergibt „zunehmende Verfeinerung“

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \int_A |\det D\Phi| d\mathcal{L}^n.$$

Satz 25.12 (Transformationssatz
für $\mathcal{L}^n$)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi: U \rightarrow \Phi(U)$

ein C^1 -Diffeomorphismus. Dann gilt:

(i) $A \subset U$ $\mathcal{L}^n$ -messbar $\iff$

$\Phi(A)$ $\mathcal{L}^n$ -messbar

(ii) $A \subset U$ $\mathcal{L}^n$ -messbar $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \int_A |\det D\Phi| d\mathcal{L}^n \in [0, \infty]$$

(iii) $g: \Phi(U) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}^n$ -messbar
 $\Leftrightarrow (g \circ \Phi) \cdot |\det \Phi| : U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
 $\mathcal{L}^n$ -messbar

(iv) $A \subset U$ $\mathcal{L}^n$ -messbar, $g: \Phi(U) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
 $\mathcal{L}^n$ -messbar $\Rightarrow$

$$\int_{\Phi(A)} g d\mathcal{L}^n = \int_A g \circ \Phi |\det D\Phi| d\mathcal{L}^n$$

wobei: Keins der Integrale existiert
oder beide existieren in $\overline{\mathbb{R}}$ und sind gleich

Beweis: Die Messbarkeitsaussage
 aus (iii) ist trivial, da Φ
 Diffeom. und somit (stetig) invertierbar
 ist. Für (i) muss man arbeiten. ∇

(ii) siehe Skizze vorab;

(iv) Sei $g \geq 0$, ansonsten zerlege
 $g = g^+ - g^-$. Schreibe $g: \Phi(U) \rightarrow [0, \infty]$

als
$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{B_k} \quad \text{mit}$$

$B_k \subset \Phi(U)$, B_k $\mathcal{L}^n$ -messbar

(vgl. Satz 24.2 !)

Dann ist

$$\int_{\Phi(A)} g d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{B_k} \cdot \chi_{\Phi(A)} d\mathcal{L}^n$$

monotone Kugz

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_k} \chi_{\Phi(A)} d\mathcal{L}^n$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_k \cap \Phi(A)} d\mathcal{L}^n$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathcal{L}^n(\Phi(A \cap \Phi^{-1}(B_k)))$$

$$\stackrel{(\text{ii})}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{A \cap \Phi^{-1}(B_k)} |\det D\Phi| d\mathcal{L}^n$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_A \chi_{B_k} \circ \bar{\Phi} |\det D\bar{\Phi}| d\mathcal{L}^n$$

monotone
Kugeln

$$= \int_A \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{B_k} \right) \circ \bar{\Phi} |\det D\bar{\Phi}| d\mathcal{L}^n$$

$$= \int_A g \circ \bar{\Phi} |\det D\bar{\Phi}| d\mathcal{L}^n$$

□

Bem. + Bsp. :

① Substitutionsregel für
Riemann Integrale als Spezial-
 fall von Satz 25.12 :